RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Premesso che quando si parla di un triangolo di vertici A,B e C adottiamo sempre la seguente nomenclatura:

- con le lettere minuscole a, b, e c indicheremo rispettivamente le misure dei lati opposti ai vertici A, B e C ;
- con le lettere α, β e γ indicheremo gli angoli rispettivamente di vertici A, B e C o le loro misure.

Risolvere un triangolo qualsiasi significa: assegnati tre elementi del triangolo, di cui almeno uno è la misura di un lato, calcolare i rimanenti tre elementi.

Per risolvere un triangolo qualunque ci serviamo dei teoremi dei seni e del coseno.
Nella risoluzione di un triangolo qualunque si possono presentare i seguenti quattro casi (ad ogni caso seguirà un esempio guidato) :

1°caso **Noti un lato e due angoli , risolvere il triangolo**.

Dati il lato a e due angoli α e β si devono determinare γ, b e c.
Prima si calcola γ se $\alpha + \beta < 180°$, poi si calcolano i due lati applicando due volte il teorema dei seni.

Esempio

Risolviamo un triangolo conoscendo α=24°, β=50°e a = 12.

Per risolvere il triangolo bisogna trovare :

a ?, b ? e γ ?

Essendo $\alpha + \beta = 74° \langle 180°$ il problema è possibile e $\gamma = 180° - 74° = 106°$

Avendo tutti gli angoli ed un lato posso utilizzare il teorema dei seni per trovare prima b e poi c.

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow b = \frac{a \cdot esen\beta}{sen\alpha} = \frac{12 \cdot sen50°}{sen24°} \cong \frac{9.19}{0.41} \cong 22.41$$

ora si calcola c :

$$c = \frac{a \cdot sen\gamma}{sen\alpha} = \frac{12 \cdot sen104°}{sen24°} \cong \frac{11.64}{0.41} \cong 28.4$$

2°caso **Noti due lati e l'angolo compreso, risolvere il triangolo**

Dati i lati a**,** b **e l'angolo compreso** γ **,determinare** c**,**α **e** β.
Si utilizza per due volte il teorema del coseno,prima per determinare il terzo lato poi per calcolare α **e di conseguenza** β **sapendo che** $\beta = 180° - \alpha - \gamma$**.**

Esempio

Risolvere un triangolo noti $a = 5$ **,** $b = 7$ **e** $\gamma = 35°$**.**

Per risolvere il triangolo si deve calcolare :

c ? , α ? e β ?

Avendo due lati e l'angolo tra essi compreso bisognerà applicare il teorema del coseno per calcolare l'altro lato:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = 25 + 49 - 70\cos 35° \cong 74 - 57.34 \cong 16.7 \quad \Rightarrow c = \sqrt{16.7} \cong 4.1$$

Conoscendo i tre lati posso calcolare un angolo riutilizzando il teorema del coseno:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{49 + 16.7 - 25}{57.4} \cong 0.71 \langle 1 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1} 0.71 \cong 45°$$

Pertanto sarà:

$$\beta = 180° - \alpha - \beta \cong 180° - 35° - 45° = 100°$$

3°caso **Noti i tre lati, risolvere il triangolo.**

Dati i lati a**,** b **e** c**,determinare gli angoli** α, β **e** γ**.**
Si applica per due volte il teorema del coseno per calcolare α **e** β**,**
poi si calcola γ**.**

Esempio

Risolvere un triangolo sapendo che $a = 4$**,** $b = 3$ **e** $c = 6$**.**

Bisogna calcolare tutti gli angoli.

Ci conviene utilizzare due volte il teorema del coseno.

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+36-16}{36} = \frac{29}{36} \langle 1 \Rightarrow \alpha = \cos^{-1}\frac{29}{36} \cong 36°$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+36-9}{48} = \frac{43}{48} \langle 1 \Rightarrow \beta = \cos^{-1}\frac{43}{48} \cong 26°$$

Pertanto sarà $\gamma = 180° - \alpha - \beta \cong 118°$

4°caso **Noti due lati e l'angolo opposto a uno di essi, risolvere il triangolo.**

Dati i lati a, b e l'angolo α, calcolare c, β e γ.
Si applica il teorema dei seni per trovare senβ se :
a) $sen\beta > 1$**, allora il problema è impossibile.**
b) $sen\beta = 1$**, allora β = 90°,accettabile solo se** $\alpha \langle 90°$**.**
c) $0 \langle sen\beta \langle 1$**,allora esistono due angoli minori di 180° che hanno lo stesso seno :** β_1 **e** $\beta_2 = 180° - \beta_1$**. Bisogna verificare se sono entrambi accettabili, se lo sono avremo due triangoli.**
Noto β si calcola γ e poi applicando il teorema dei seni si calcola c.
Nel caso di due triangoli bisogna trovare due valori per γ e due per c.

\Esempio 1

Risolvere un triangolo conoscendo $a = 18$**,** $b = 36$ **e** $\alpha = 45°$.

Bisogna trovare :

$c ?, \beta ? e\gamma ?$

Si deve utilizzare il teorema dei seni :

$$\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} \Rightarrow sen\beta = \frac{b sen\alpha}{a} = \frac{36 sen 45°}{18} = \sqrt{2} \cong 1.4 \rangle 1 \Rightarrow$$ il problema è impossibile.

Esempio 2

Noti $a = 2\sqrt{3}$**,** $b = 6$ **e** $\alpha = 30°$**,risolvere il triangolo.**

Bisogna calcolare: $c ?, \beta ? e\gamma ?$

Si deve utilizzare il teorema dei seni :

$$sen\beta = \frac{bsen\alpha}{a} = \frac{6\frac{1}{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Poiché esistono due angoli minori di 180° il cui seno è $\frac{\sqrt{3}}{2}$ un angolo sarà $\beta_1 = 60°$ e l'altro $\beta_2 = 180° - \beta_1 = 120°$

Entrambi i valori sono accettabili essendo :

$\alpha + \beta_1$ = 60°+30°= 90°< 180° e $\alpha + \beta_2 = 30° + 120° = 150°$< 180°

Esistono pertanto due triangoli che risolvono il nostro problema:

a) un triangolo avente come angoli $\alpha = 30°$, $\beta_1 = 60°$ e di conseguenza sarà $\gamma = 90°$,cioè un triangolo rettangolo in C. Per risolvere il triangolo bisogna calcolare c (ipotenusa) essendo a e b già noti.

   Si applica il primo teorema sui triangoli rettangoli :

$$c = \frac{a}{sen\alpha} = \frac{2\sqrt{3}}{sen30°} = 4\sqrt{3}$$

b) il secondo triangolo avrà $\alpha = 30°$, $\beta_2 = 120°$ e $\gamma = 180° - 30° - 120° = 30°$.
   Il triangolo è isoscele, di conseguenza :
   Se $\alpha = \gamma \Rightarrow c = a = 2\sqrt{3}$
   Abbiamo così risolto il triangolo.